OS POLINÓMIOS

Artur Olímpio F. Gonçalves da Silva
a.o.silva@sapo.pt

Resumo

O presente artigo inicia-se evidenciando que os polinómios são entidades matemáticas de manuseamento muito fácil com aplicações práticas interessantes sendo, depois, feito o enquadramento dos polinómios no âmbito das expressões analíticas.

No que respeita à determinação dos zeros dos polinómios são referidas as 1ª e 2ª regras de Descartes, a regra de Budan, a regra do máximo, o corolário do Teorema de Rolle e as relações de Newton. Depois as regras referidas são aplicadas à determinação dos zeros de polinómios de coeficientes inteiros, sendo evidenciada a seguinte ordem: zeros inteiros, zeros fracionários e zeros irracionais.

Posteriormente é realçada a determinação de zeros de polinómios do 3º grau e, em notas finais, evidencia-se que, enquanto os polinómios dos 2º, 3º e 4º graus contemplam fórmulas resolventes genéricas que permitem expressar os seus zeros através de expressões racionais e de raízes de índice não superior ao grau do polinómio, o mesmo não sucede para polinómios de grau superior ao 4º sendo evidenciado que os méritos da demonstração desta realidade couberam a Niels Abel e a Evariste Galois.

Palavras-chave: Polinómios e Zeros de polinómios

Abstract

In this paper we begin by highlighting that polynomials are mathematical entities with very interesting practical applications and it is also shown how they can be analysed within the framework of analytic expressions.

To determine the zeros of a polynomial, we can use different mathematical results. Therefore, the first and second rules of Descartes, the Budan rule, the maximum rule, the corollary of Rolle's Theorem, and Newton's relations are presented. Those rules are then applied in the determination of the zeros of a polynomial with integer coefficients. We start by emphasize the determination of integer zeros, next the fractional zeros and finally the irrational zeros.

Subsequently, the determination of zeros of a 3rd degree polynomial is explained, and in final notes, it is highlighted that there are formulas to find the zeros of a generic polynomial of 2nd, 3rd or 4th degree. However, the same does not happen for polynomials of degree higher than 4, as it was shown by Niels Abel and Evariste Galois.

Keywords: Polynomials and Zeros of a polynomial

1. Introdução

Os polinómios (soma algébrica de monómios) são entidades matemáticas muito fáceis de manusear e têm aplicações práticas muito interessantes desde situações muito simples como, no caso de um cubo de aresta *a* em que os monómios $4a$, $6a^2$ e a^3 dizem respeito ao perímetro de uma das faces, à área total e ao volume, respetivamente, até a sequências de valores de determinados fenómenos, desconhecendo-se, porém, as leis que os regem. Nestas situações, é usual definirem-se polinómios adequados a tais sequências, através de técnicas matemáticas convenientes como a interpolação polinomial e a aproximação polinomial, passando tais polinómios a constituir primeiras modelações das leis em jogo.

Os polinómios constituem uma família muito particular de um mais vasto conjunto de seres matemáticos denominados expressões analíticas. Tem, pois, interesse começarmos por definir o conceito de expressão analítica. Assim, por expressão analítica entende-se toda a expressão que se obtém ligando entre si símbolos numéricos e símbolos literais, reportando-se estes a variáveis numéricas, através de sinais das operações fundamentais da Análise Matemática: a adição, a subtração, a multiplicação, a potenciação de expoente natural, a divisão, a extração de raízes de índice natural e a passagem ao limite.

Atendendo a que as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são representáveis, nos respetivos domínios de existência, por expressões analíticas, e que as operações de derivação e de integração são definidas por meio das operações fundamentais atrás, referidas, a definição de expressão analítica, também, se estende às situações em que nas expressões, para além dos sinais das operações fundamentais, figuram símbolos daquelas funções e/ou de operações de derivação e integração.

Exemplo 1: $x^2 + x + 3$

Exemplo 2: $2x^2 + \sqrt{x-2} + 8$

Exemplo 3: $\frac{3x+7}{x+2}$

Exemplo 4: $x^3 + y^2$

Exemplo 5: $\sin(4x)$

Exemplo 6: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n + 10x + 12$

Tendo em vista contextualizar os polinómios no âmbito das expressões analíticas tenhamos em atenção que

- as expressões analíticas, consoante as operações que nela intervenham, classificam-se em algébricas (exemplos 1, 2, 3 e 4) e transcendentes (exemplos 5 e 6), caracterizando-se as algébricas por nenhuma das suas variáveis ser afetada por uma operação que não vá para além das operações da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão, da potenciação de expoente natural ou da radiciação de expoente, também, natural;

- as expressões algébricas, por sua vez, são classificadas em racionais, (exemplos 1, 2 e 4) e irracionais (exemplo 2) sendo racionais aquelas em que nenhuma das suas variáveis intervêm em operações de radiciação;

- finalmente, as expressões algébricas racionais contemplam os polinómios, quando os símbolos numéricos e os símbolos literais são interligados por sinais de adição, subtração, multiplicação e potenciação de expoente natural (exemplos 1 e 4) e as expressões algébricas racionais propriamente ditas (exemplo 2), que evidenciam quocientes de polinómios em que o polinómio denominador tem grau igual ou superior a 1.

No âmbito do presente artigo, vamos incidir a nossa atenção em polinómios de coeficientes reais a uma única variável (exemplo 1).

2. Zeros de polinómios

Quando se estuda um polinómio, uma das vertentes mais importantes deste estudo consiste na determinação dos seus zeros. Assim, e tendo em vista esta vertente do estudo, são de particular interesse as 1ª e 2ª regras de Descartes, a regra do máximo, a regra de Budan, o corolário do Teorema de Rolle e as relações de Newton que a seguir passamos a descrever.

2.1. 1ª Regra de Descartes

Esta regra pode ser enunciada do modo seguinte: "o número de zeros reais positivos, n^+, de um polinómio real de coeficientes reais P(x), devidamente ordenado pelo grau dos monómios que o constituem, não excede o número de variações, v^+, dos sinais posicionais dos seus coeficientes significativos e a diferença $v^+ - n^+$ é um número par".

Exemplo 7: Considere-se P(x) = $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$.

A sequência de sinais posicionais é + + - + pelo que $v^+=2$. Atendendo a que v^+-n^+0 e v^+-n^+ é par conclui-se que $n^+=0$ $n^+=2$.

2.2. 2ª Regra de Descartes

Dado que os zeros negativos de P(x) são os zeros positivos de P(-x) a 2ª regra de Descartes pode ser enunciada do modo seguinte: "o número de zeros reais negativos, n^-, de um polinómio real de coeficientes reais P(x), devidamente ordenado pelo grau dos monómios que o constituem, não excede o número de variações, v^-, dos sinais posicionais dos coeficientes significativos de P(-x) e a diferença $v^- - n^-$ é um número par".

Tendo em atenção o polinómio P(x) referido no exemplo 7, tem-se P(-x) = $-8x^3 + 4x^2 + 34x + 15$ cuja sequência dos seus sinais posicionais é - + + + pelo que $v^-=1$. Ora, atendendo a que $v^- - n^-0$ e $v^- - n^-$é par tem-se, obviamente, $n^-=1$ pelo que se conclui que P(x) tem um zero real negativo.

2.3. Regra do máximo

Esta regra permite-nos a obtenção de um intervalo limitado no qual estão situados todos os zeros reais de um polinómio P(x) de coeficientes reais. O seu enunciado é o seguinte:

> "Seja P(x)= $a_0\ x^n + a_1\ x^{n-1} + \ \dots\ + a_{n-1}\ x\ +\ a_n$ um polinómio de grau n e de coeficientes reais. Os zeros z de P(x) verificam a desigualdade
>
> $|z| < \text{r sendo r} = 1 + \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_0}\right| : 0 \le k \le n\right\}$"

Exemplificando com o polinómio P(x)= $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$ temos

> $\max\ \{\ \left|\frac{8}{8}\right|, \left|\frac{4}{8}\right|, \left|\frac{-34}{8}\right|, \left|\frac{15}{8}\right|\ \} = \frac{34}{8}$ donde $r = 1 + \frac{34}{8} = 5{,}25$.
>
> Assim, podemos concluir que os zeros reais de P(x) estão no intervalo]-5,25 ; 5,25[.

2.4. Regra de Budan

Esta regra permite a obtenção de uma estimativa do número de zeros reais de um polinómio P(x), de grau n, existentes num dado intervalo [a, b] pode enunciar-se do modo seguinte: "considerem-se as duas sequências P(a), P´(a), P´´(a), ..., $P^{(n)}$(a) e P(b), P´(b), P´´(b), ..., $P^{(n)}$(b) e sejam v_a e v_b o número de variações dos sinais posicionais dos valores das 1ª e da 2ª sequências, respetivamente. O número de zeros n_{ab} de P(x) no intervalo [a, b} não excede ($v_a - v_b$) e a diferença

> ($v_a - v_b$) – n_{ab} é um número par".

Continuando a utilizar-se como o exemplo P(x)= $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$, e dado que ele é de grau 3, consideremos as suas 1ª, 2ª e 3ª derivadas. Tem-se, então,

> P´(x) = $24x^2 + 8x - 34$
>
> P´´(x) = $48x + 8$
>
> P´´´(x) = 48

A título de exemplo consideremos os pontos x=-2, x=0 e x=2

X	-2	0	2
P(x)	+	+	+
P´(x)	+	-	+
P´´(x)	-	+	+
P´´´(x)	+	+	+
vx	2	2	0

Analisando o quadro podemos concluir que em [-2, 0] o polinómio P(x) não tem zeros dado que $v_{-2} – v_0 = 2 – 2 = 0$ e em [0, 2] o polinómio P(x) ou não tem zeros ou tem dois zeros visto que $v_0 – v_2 = 2 – 0 = 2$.

2.5 Corolário do Teorema de Rolle

O corolário do Teorema de Rolle diz-nos que sendo f(x) uma função contínua num intervalo [a, b] tal que f(a) × f(b) < 0 então existe pelo menos um zero de f(x) no intervalo]a, b[. Ora sendo os polinómios de coeficientes reais funções contínuas em qualquer intervalo do conjunto dos números reais, podemos enunciar a seguinte situação particular: "dado um polinómio P(x) de coeficientes reais e sendo a e b (com a<b) dois números reais para os quais P(a) × P(b) < 0 então P(x) admite pelo menos um zero em]a, b[".

A título de exemplo consideremos, novamente,

P(x) = $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$.

X	-2	-1	0	1	2
P(x)	+	+	+	-	+

Analisando o quadro podemos concluir que P(x) admite um zero em]0,1[e um outro em]1, 2[. Como tínhamos visto, aquando da 2ª Regra de Descartes, o número estimado de zeros reais negativos, para o polinómio em questão, é 1; observámos, também, que de acordo com a regra de Budan o polinómio não contempla quaisquer zeros no intervalo [-2, 0], pelo que podemos afirmar que o zero real negativo é inferior a -2. Assim, e tendo presente a regra do máximo, que nos garante que os zeros reais do polinómio em jogo pertencem ao intervalo]5,25; 5,25[, vamos continuar a pesquisa do zero negativo de P(x) no intervalo]-5,25; -2[.

X	-5	-4	-3	-2
P(x)	-	-	-	+

Face a este último quadro, podemos afirmar que o zero negativo de P(x) pertence ao intervalo]-3, -2[. Efetivamente tal zero é $-\frac{5}{2}$ (facilmente se verifica que $P(-\frac{5}{2})=0$). Os outros dois zeros são $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

2.6. Relações de Newton

O inglês Issac Newton (1642-1727) demonstrou que os zeros z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n de um polinómio de grau n,

$$a_0\ x^n + a_1\ x^{n-1} + + a_{n-1}\ x + a_n$$

satisfazem as seguintes relações:

(1) $z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} + z_n = -\frac{a_1}{a_0}$

(2) $z_1\ z_2 + z_1\ z_3 + \ldots + z_1\ z_n + z_2\ z_3 + z_2\ z_3 + \ldots + z_2\ z_n + \ldots + z_{n-1}\ z_n = \frac{a_2}{a_0}$

(3) $z_1\ z_2\ z_3 + z_1\ z_2\ z_4 + \ldots + z_1\ z_2\ z_n + z_2\ z_3\ z_4 + \ldots + z_2\ z_3\ z_n + + z_{n-2}\ z_{n-1}\ z_n = -\frac{a_2}{a_0}$

…

(n) $z_1\ z_2\ z_3 \ldots z_{n-2}\ z_{n-1}\ z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$

Utilizando, como exemplo, o polinómio $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15$ cujos zeros, como já foi referido são $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, podemos constatar que

(1) $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

(2) $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{17}{4}$ $\qquad \frac{a_2}{a_0} = \frac{-34}{8} = -\frac{17}{4}$

(3) $z_1 z_2 z_3 = -\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{8}$ $\quad -\frac{a_2}{a_0} = -\frac{15}{8}$

3. Zeros de polinómios de coeficientes inteiros

As regras evidenciadas na secção anterior aplicam-se a qualquer polinómio de coeficientes reais. Analisaremos, de seguida, a situação em que o polinómio tem coeficientes inteiros. Para este efeito iremos seguir a ordem seguinte:

- determinação de zeros inteiros;

- determinação de zeros fracionários;

- determinação de zeros irracionais.

3.1. Determinação de zeros inteiros

Uma regra muito interessante, a regra dos múltiplos de 3, diz que "é condição necessária, mas não suficiente, para que um polinómio de coeficientes inteiros P(x) admita zeros inteiros que, pelo menos, um dos valores P(-1), P(0) e P(1) seja múltiplo de 3"

Exemplo 8:

Considere-se o polinómio P(x)=$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 8$. Como nenhum dos valores P(-1)=7; P(0)=8 e P(1)=13 é múltiplo de 3 pode concluir-se que este polinómio não tem zeros inteiros.

Tendo em vista a determinação de zeros inteiros consideremos um polinómio genérico de grau n, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ e admitamos que z é um zero inteiro de P(x). Tem-se então que P(x)=(x-z) Q(x) sendoQ(x)= $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ b_{n-2}x + b_{n-1}$ polinómio de coeficientes inteiros e de grau n-1.

Facilmente se constata que $-z \times b_{n-1} = a_n$, pelo que podemos afirmar que a_n é um múltiplo de z. Daqui decorre a seguinte afirmação: "Num polinómio real de coeficientes inteiros, os zeros reais, caso existam, são divisores do termo independente".

Exemplo 9:

Consideremos o polinómio P(x) = $2x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 5x + 6$. Observando o polinómio conclui-se com facilidade que P(0)=6 é um múltiplo de 3. Logo é possível que o polinómio admita zeros inteiros. Ora, os "candidatos" a zeros inteiros são os divisores de 6: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\ e\ \pm 6$. Determinemos, então, o valor de P(x) para cada um dos valores referidos.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
P(x)	5256	570	180	36	6	0	0	876

Da tabela infere-se que os zeros inteiros de P(x) são 2 e 3.

3.2. Determinação de zeros fracionários

Consideremos o polinómio genérico de grau n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

e admitamos que ele contempla p zeros inteiros $z_1, z_2, \ldots, z_p$, iguais ou distintos.

Tem-se, então *P(x)*= $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$= (x- z_1) (x- z_2) … (x- z_p) Q(x) em que Q(x)= $b_0x^{n-p} + b_1x^{n-p-1} + \cdots + b_{n-p-1}x + b_{n-p}$ é um polinómio de coeficientes inteiros de grau n-p, não admitindo zeros inteiros, em que os seus primeiro e último coeficientes satisfazem as relações, respetivamente, $b_0 = a_0$ e $a_n = (-1)^p z_1 \times z_2 \times \ldots \times z_p \times b_{n-p}$.

Os zeros fracionários de P(x) são, naturalmente, os zeros fracionários de Q(x). Por uma questão de comodidade façamos m=n-p. Assim, o polinómio Q(x) passa a apresentar a forma Q(x)= $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$.

Para determinarmos os zeros fracionários de Q(x), isto é, para determinarmos as soluções da equação Q(x)=0, consideremos a mudança de variável $x = \frac{y}{b_0}$.

$$\mathrm{Q(x)=0} \Leftrightarrow \mathrm{Q}(\tfrac{y}{b_0}.)=0 \Leftrightarrow b_0\left(\frac{y}{b_0}\right)^m + b_1\left(\frac{y}{b_0}\right)^{m-1} + \cdots + b_{m-1}\left(\frac{y}{b_0}\right) + b_m = 0$$

$$\Leftrightarrow b_0\frac{y^m}{b_0^m} + b_1\frac{y^{m-1}}{b_0^{m-1}} + \cdots + b_{m-1}\frac{y}{b_0} + b_m = 0$$

$$\Leftrightarrow y^m + b_1\ y^{m-1} + b_2\ b_0\ y^{m-2} + \ldots + b_{m-1}\ b_0^{m-2}y + b_m\ b_0^{m-1} = 0$$

Sendo w_1, w_2, ... , w_k as soluções inteiras desta última equação e, tendo-se em atenção a mudança de variável $x = \frac{y}{b_0}$, então $\frac{w_1}{b_0}, \frac{w_2}{b_0}, \ldots, \frac{w_k}{b_0}$ são os zeros fracionários de Q(x) e, por conseguinte os zeros fracionários de P(x).

Exemplo 10.

Seja $P(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1$.

Comecemos por identificar um intervalo onde os zeros de P(x) podem situar-se. Assim, utilizando a regra do máximo podemos concluir que os zeros reais de P(x), a existirem, pertencem ao intervalo $\left]-\left(1+\frac{7}{6}\right);\ \left(1+\frac{7}{6}\right)\right[= \left]-\frac{13}{6};\ \frac{13}{6}\right[$.

Os “candidatos” a zeros inteiros são -1 e 1. Como P(-1)=24 e P(1)=4 podemos concluir que P(x) não tem zeros inteiros.

Para calcularmos os zeros fracionários consideremos a mudança de variável $x = \frac{y}{6}$.

$$\mathrm{P(x)=0} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\tfrac{y}{6})=0 \Leftrightarrow 6\left(\frac{y}{6}\right)^4 - 5\left(\frac{y}{6}\right)^3 + 7\left(\frac{y}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{6}\right) + 1=0$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 5y^3 + 42y^2 - 180y + 216 = 0$$

Os “candidatos” a soluções inteiras da equação são os divisores de 216: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 18;\ \pm 24;\ \pm 36;\ \pm 72;\ \pm 108;\ \pm 216.$ Porém, atendendo a que $x = \frac{y}{6}$, podemos afirmar que os “candidatos” estão restringidos ao intervalo $\left]6 \times \left(-\frac{13}{6}\right); 6 \times \frac{13}{6}\right[=]-13; 13[$. Deste modo vamos concentrar, somente, a nossa atenção nos candidatos $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 9;\ \pm 12.$

y	$y^4 - 5y^3 + 42y^2 - 180y + 216$
-12	37800
-9	15444
-8	11000
-6	5184
-4	2184
-3	1350
-2	800
-1	444

y	$y^4 - 5y^3 + 42y^2 - 180y + 216$
1	74
2	0
3	0
4	104
6	864
8	3000
9	4914
12	16200

A tabela evidencia que 2 e 3 são as soluções de

$$y^4 - 5y^3 + 42y^2 - 180y + 216 = 0$$

e, consequentemente, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

e são os zeros xfracionários de $P(x) = 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1.$

3.3. Determinação de zeros irracionais

Uma vez determinados os zeros inteiros e os zeros fracionários de um polinómio P(x) procede-se à determinação dos zeros irracionais, caso existam.

Consideremos, novamente, o polinómio genérico de grau n

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

e admitamos que ele contempla p zeros inteiros $z_{1,}$ z_2, ..., z_p, iguais ou distintos, e q zeros fracionários, iguais ou distintos. Tem-se, então

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x- z_1)\,(x- z_2)\,\ldots\,(x- z_p)\,(x- z_{p+1})\,(x- z_{p+2})\,\ldots\,(x- z_{p+q})\,R(x)$$

sendo R(x) um polinómio de grau n-(p+q) e já não admitindo zeros racionais (inteiros e fracionários).

Se R(x) é um polinómio de grau inferior a 3 a determinação dos seus zeros não oferece quaisquer dificuldades; caso contrário, poderão ser utilizados métodos do âmbito da Análise Numérica como, por exemplo, o da bissecção, o da falsa posição, o método de Newton, entre outros, para nos proporcionarem valores aproximados dos zeros irracionais que se pretende determinar.

Como nota refira-se que, quando os polinómios envolvidos são dos 3º ou 4º graus, existem fórmulas resolventes para a determinação dos seus zeros, as quais, ressalve-se, não são muito práticas de utilizar. Na secção seguinte iremos apresentar a fórmula resolvente quando o polinómio em jogo é do 3º grau.

4. Determinação dos zeros de polinómios do 3º grau

4.1. Polinómios do tipo $\boldsymbol{x^3 + Ax + B}$

Um processo de determinação dos zeros de um polinómio do tipo $\boldsymbol{x^3 + Ax + B}$ ou seja da determinação das soluções da equação $\boldsymbol{x^3 + Ax + B = 0}$, consiste em admitir que uma das soluções desta equação se obtém a partir da diferença entre dois valores, não nulos, que referiremos por s e t. Assim, substituindo na equação anterior a variável x por s-t obtemos

$$(s-t)^3 + A(s-t) + B = 0$$
$$\Leftrightarrow\ s^3 - 3s^2t + 3st^2 - t^3 + A(s-t) + B = 0$$
$$\Leftrightarrow\ s^3 -\ t^3 - 3st(s-t) + A(s-t) + B = 0$$

Como existe uma infinidade de possibilidades para a seleção de s e de t, vamos considerar aquela em que

$$s^3 - t^3 + B = 0\ \wedge\ -3st(s-t) + A(s-t) = 0 \Leftrightarrow 3st = A\ \wedge\ s^3 - t^3 = -B$$

Resolvendo a primeira equação em ordem a s, obtém-se $s = \frac{A}{3t}$ e, substituindo s na segunda equação, resulta $\left(\frac{A}{3t}\right)^3 - t^3 = -B \quad \Leftrightarrow\ t^6 - Bt^3 - \frac{A^3}{27} = 0\ \ (1)$

Em (1), considerando $u = t^3\ \wedge\ C = -\frac{A^3}{27}$ obtém-se $u^2 - Bu + C = 0\ (2)$

Considerando uma das soluções de (2) $u_1 = \frac{B+\sqrt{B^2-4C}}{2}$ e tendo-se em atenção as mudanças de variável efetuadas resulta $t = \sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2-4C}}{2}}\ \wedge\ s = \frac{A}{3\sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2-4C}}{2}}}$

donde uma das soluções da equação é

$$s - t = \frac{A}{3\ \times\ \sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2-4\left(-\frac{A^3}{27}\right)}}{2}}} - \sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2-4\left(-\frac{A^3}{27}\right)}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ s - t = \frac{A}{3\ \times\ \sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}}} - \sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2+\frac{4A^3}{27}}}{2}} \qquad (3)$$

Exemplo 11

Considere-se o polinómio $\boldsymbol{x^3 + x - \frac{26}{27}}$

$$\begin{cases} 3st = 1 \\ s^3 - t^3 = \frac{26}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{3t} \\ \frac{1}{27t^3} - t^3 - \frac{26}{27} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{3t} \\ 27t^6 - 26\,t^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{1}{3t} \\ t^3 = -1 \ \vee \ t^3 = \dfrac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{1}{3t} \\ t = -1 \ \vee \ t = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow s - t = \frac{2}{3}$$

Um zero de $x^3 + x - \frac{26}{27}$ é, pois, $\frac{2}{3}$.

4.2. O caso geral $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d}$

Perante um polinómio do 3º grau em que não é nulo o coeficiente do termo do 2º grau, é sempre possível, na determinação dos zeros, fazer-se uso do resultado referido na secção anterior. Vejamos como:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$$\overset{x=y+h}{\Leftrightarrow} (y+h)^3 + \frac{b}{a}(y+h)^2 + \frac{c}{a}(y+h) + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + \frac{b}{a}(y^2 + 2yh + h^2) + \frac{c}{a}(y+h) + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \left(3h + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3h^2 + 2h\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)y + \left(h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h + d\right) = 0$$

Considerando $h = -\frac{b}{3a}$, o coeficiente do termo do 2º grau anula-se. Deste modo obtemos uma equação da forma $y^3 + Ay + B = 0$ à qual se aplica o método atrás referido.

Exemplo 12.

Determinação dos zeros de $x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{80}{27}$

$$x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{80}{27} = 0$$

$$\overset{x=y+h}{\Leftrightarrow} \quad (y+h)^3 - 3\,(y+h)^2 + 4\,(y+h) - \frac{80}{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + y^3 - 3(y^2 + 2yh + h^2) + 4\,(y+h) - \frac{80}{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 + (3h-3)y^2 + (3h^2 - 6h + 4)y + \left(h^3 - 3h^2 + 4h - \frac{80}{27}\right) = 0$$

$$\Rightarrow^{h=1} \quad y^3 + y - \frac{26}{27} = 0$$

Tal como, vimos, no exemplo anterior, uma solução desta equação é $\frac{2}{3}$ pelo que um dos zeros do polinómio inicial é $\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$.

5. Notas finais

Euclides de Alexandria (323 a.C. – 285 a.C.) refere na sua famosa obra "*Os Elementos*", que já no século V a.C. a Escola Pitagórica resolvia problemas geométricos. Estes, posteriormente, vieram a ser interpretados algebricamente através de equações do 2º grau. A este propósito saliente-se que foram os matemáticos hindús e árabes, nos primeiros séculos da nossa era, que evidenciaram de forma categórica que as equações do 2º grau se resolvem a partir dos seus coeficientes através de expressões racionais e de radicais de índice 2 (Caraça (1932), p. 14).

Poucos anos após o falecimento de Euclides, Arquimedes de Siracusa (287 a.C.- 212 a.C.) e Apolónio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.) utilizaram processos de construção geométrica para a resolução de problemas que, algebricamente, puderam ser interpretados, séculos mais tarde, por equações dos 3º e 4º graus. Neste âmbito refira-se que foi, somente, no século dezasseis que as fórmulas algébricas para resolução das equações do 3º grau e do 4º graus foram descobertas. Para as equações do 3º grau a resolução ocorreu, independentemente, por Scipio Ferro (1465 – 1526) e Tartaglia (1500 – 1557), respetivamente, em 1515 e 1535, e a sua divulgação foi feita, em 1545, por Girolamo Cardano (1501 - 1576) no seu tratado "*Ars Magna*" onde é descrita, também, a técnica de resolução para equações do 4º grau, da autoria do seu discípulo Luigi Ferrari (1522 – 1565).

Como nas fórmulas resolventes das equações dos 2º, 3º e 4º graus, as soluções são expressas, em termos dos seus coeficientes, através de expressões racionais e de raízes de índice não superior ao grau equação, seria de supor que o mesmo ocorreria para as equações de grau superior ao 4º. Porém, após intensa investigação, passou-se a suspeitar que tal não seria assim e, de tal modo que, Paolo Rufini (1775 -1822), em 1799, apresentou um teorema, cuja demonstração não estava totalmente isenta de erros (Caraça, p. 15), cujo enunciado refere que "a equação de grau superior ao 4º não é resolúvel por meio de radicais". Foram Niels Abel (1802 – 1829), em 1825, e Evariste Galois (1811 – 1832), em 1832, de forma independente, quem efetivamente demonstraram a impossibilidade de resolução genérica de equações de grau superior ao 4º, através de formas resolventes de cariz algébrico.

Referências

Boyer ,Carl B. (2007). *História de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A (terceira reimpressão).

Caraça, Bento de Jesus (1970). *A Vida e Obra de Evaristo Galois* (palestra realizada no ISCEF em 31 de Maio de 1932) in *A Cultura Integral do Individuo: Conferências e Outros Escritos*. Lisboa: Editorial Minerva. Pp. 11 – 28.

Coelho, Furtado (1964) – *Apontamentos de Aulas Práticas de Matemáticas Gerais*. Lisboa: IST.

Silva, José Sebastião e (1978). *Compêndio de Matemática: Curso Complementar do Ensino Secundário*. Lisboa: GEP.